Задачи 29 и 30 (бывшие С2 и С3)

Задача 29 (по новой нумерации, которую вводят в ЕГЭ с 2015 года) – это расчетная задача на механику. До 2014 года включительно она фигурировала под номером «С2».

Это может быть кинематика, динамика, динамика движения по окружности, задача на законы сохранения в механике, статику или гидростатику.

Например, задача на движение тела, брошенного под углом к горизонту:

1. Маленький шарик падает сверху на наклонную плоскость и упруго отражается от нее. Угол наклона плоскости к горизонту равен 30°. На какое расстояние по горизонтали перемещается шарик между первым и вторым ударами о плоскость? Скорость шарика в момент первого удара направлена вертикально вниз и равна 1м/с.

Решение:

Запишем «дано»:

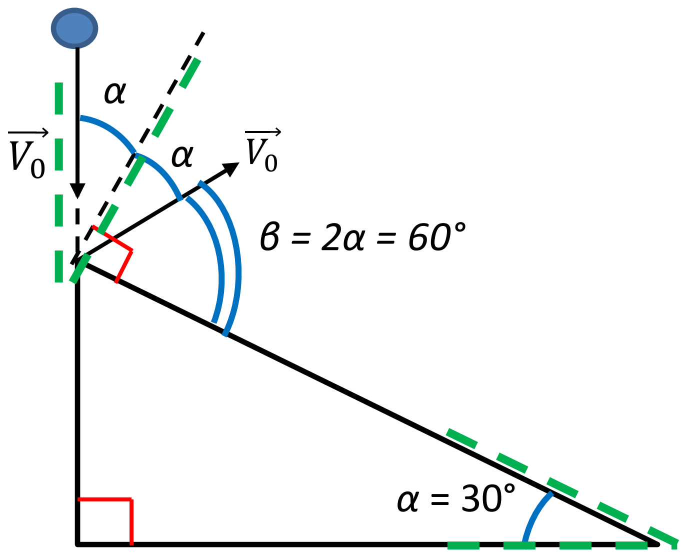
Дано:	Решение:
V_0 = 1 м/с	
α = 30°	
L - ?	

В задачах части «С» необходимо описывать все параметры, которых нет в дано, иначе оценку снижают на один балл.

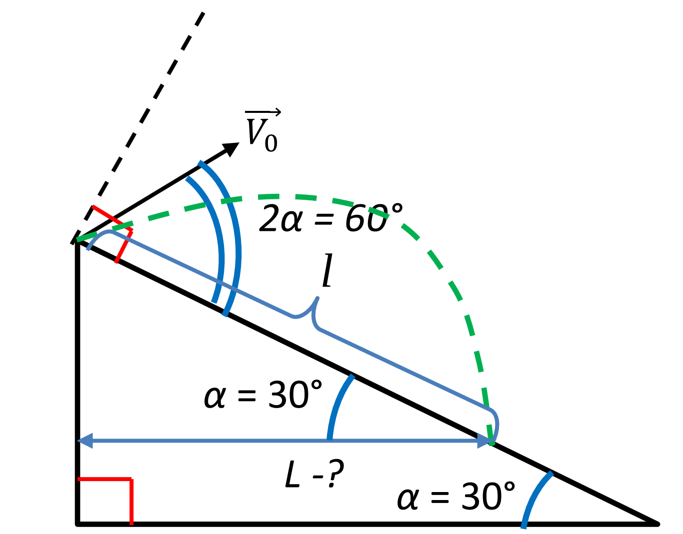
Поэтому пишем:

L – расстояние по горизонтали между первым и вторым ударами о плоскость.

Нарисуем наклонную плоскость и начальную скорость шарика $\overrightarrow{V_0}$. Как известно из геометрии, углы с перпендикулярными сторонами равны. Начальная скорость шарика перпендикулярна основанию наклонной плоскости. Восстановим перпендикуляр к наклонной плоскости в точке падения на нее шарика. Тогда угол между этим перпендикуляром и вектором начальной скорости равен углу наклона плоскости к горизонту (углы с перпендикулярными сторонами, зеленые пунктирные линии на рисунке). Угол падения шарика (с перпендикуляром) равен углу отражения α = 30°. Тогда угол между начальной скоростью отскочившего шарика и наклонной плоскостью равен β = 90° - α = 90° - 30° = 60° = 2α. Модуль скорости не меняется, так как удар упругий.



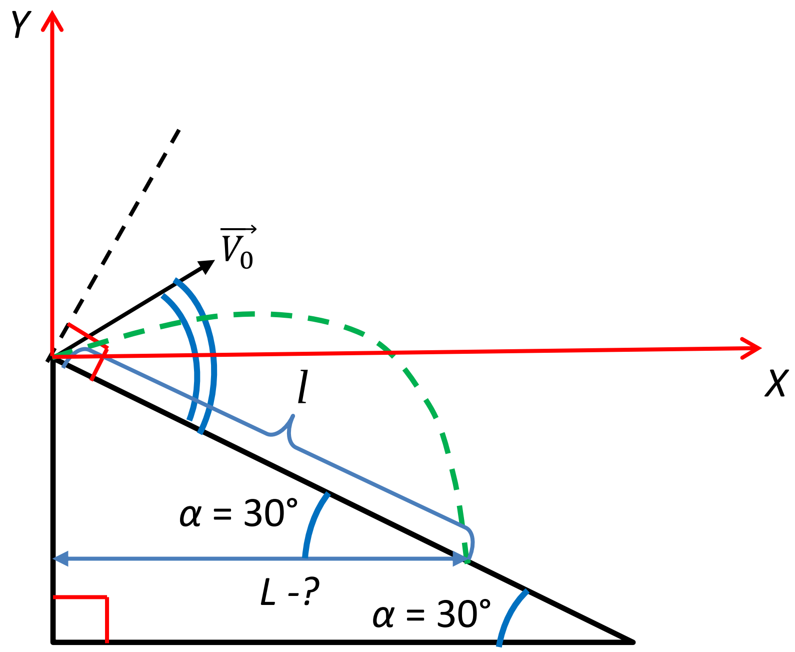
Итак, убираем построения, которые нам больше не нужны:



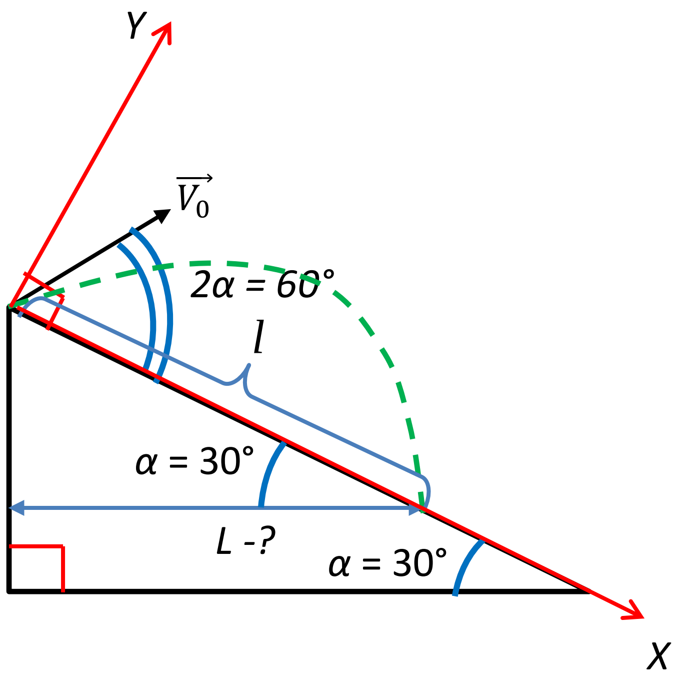
Тело будет двигаться по параболе и упадет на расстоянии $\boldsymbol{l}$ от точки бросания вдоль наклонной плоскости. Это не то расстояние, которое нам надо найти, мы ищем *L*- расстояние по горизонтали. Но, если мы знаем $\boldsymbol{l}$, найти *L* очень легко: $L = \boldsymbol{l} \cos \alpha$.

Теперь нужно выбрать систему отсчета. С началом отсчета все ясно, очевидно, мы берем его в точке падения шарика. А вот с направлениями осей все не так просто.

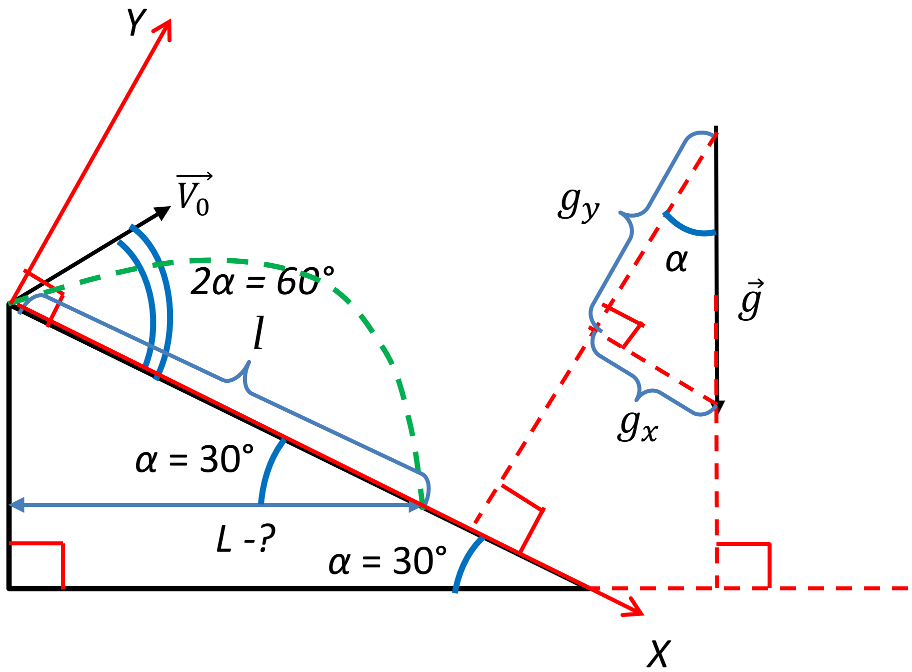
Можно выбрать оси традиционным способом: «X» горизонтально и «Y» вертикально:



Но при таком выборе осей трудно определить точку падения. Поэтому в подобных задачах оси обычно выбирают иначе: «X» вдоль наклонной плоскости, а «Y» перпендикулярно наклонной плоскости:



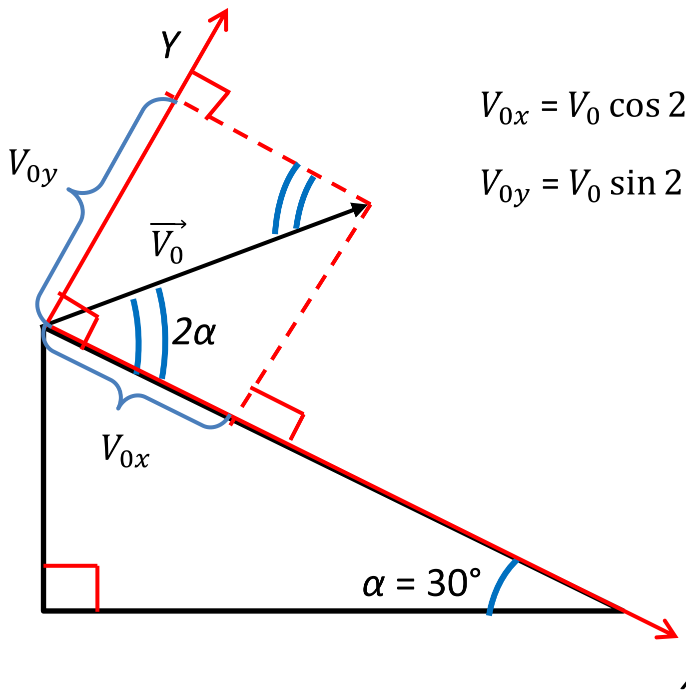
При таком выборе осей точка падения определяется элементарно: там координата «y» обращается в ноль. Зато движение становится равноускоренным по двум осям, поскольку ускорение g проектируется на обе оси:



$g_x = g \sin \alpha$ – противолежащий катет;

$g_y = - g\cos \alpha$ – прилежащий катет.

Начальная скорость $\overrightarrow{V_0}$ также проектируется на обе оси:



$V_{0x} = V_0 \cos 2\alpha$ – прилежащий катет;

$V_{0y} = V_0 \sin 2\alpha$ – противолежащий катет

Зависимости координат от времени при равноускоренном движении выражаются формулами:

$$x = x_0 + V_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$$

$$y = y_0 + V_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}$$

Подставляя значения проекций скорости и ускорения, получаем:

$$\begin{cases} x = V_0 \cos 2\alpha \, t + g \ \sin\alpha \frac{t^2}{2} = l \\ y = V_0 \sin 2\alpha \ t - g \cos\alpha \ \frac{t^2}{2} = 0 \end{cases}$$

Начальные координаты: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$;

Конечная координата y также равна нулю, так как тело падает на наклонную плоскость.

Из второго уравнения получаем:

$$t \, (V_0 \sin 2\alpha \ - g \cos\alpha \ \frac{t}{2}) = 0$$

Это уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} t = 0 \\ V_0 \sin 2\alpha - g\, cos\, \alpha\, \frac{t}{2} = 0 \end{array}\right.$$

Из второго уравнения находим t:

$$V_0 \sin 2\alpha = g\, cos\, \alpha\, \frac{t}{2}$$

$$2V_0 \sin 2\alpha = g\, cos\, \alpha\ t$$

$$t = \frac{2V_0 \sin 2\alpha}{g\, cos\, \alpha}$$

Подставляем t в уравнение для l:

$$l = V_0 \cos 2\alpha \frac{2V_0 \sin 2\alpha}{g\, cos\, \alpha} + g\ sin\, \alpha \frac{(\frac{2V_0 \sin 2\alpha}{g\, cos\, \alpha})^2}{2},$$

Откуда:

$$l = 2{V_0}^2 \cos 2\alpha \frac{\sin 2\alpha}{g \cos \alpha} + g\ sin\, \alpha\ \frac{4{V_0}^2 (\sin 2\alpha)^2}{2g^2 (\cos \alpha)^2},$$

$$l = \frac{2{V_0}^2 \sin 2\alpha(\cos 2\alpha \cos \alpha + sin\, \alpha\ \sin 2\alpha)}{g\, (\cos \alpha)^2},$$

Тогда:

$$L = \boldsymbol{l} \cos \alpha = \frac{2{V_0}^2 \sin 2\alpha(\cos 2\alpha \cos \alpha + sin\, \alpha\ \sin 2\alpha)}{g\, (\cos \alpha)^2} \cos \alpha =$$

$$= \frac{2{V_0}^2 \sin 2\alpha(\cos 2\alpha \cos \alpha + sin\, \alpha\ \sin 2\alpha)}{g \cos \alpha}$$

Но $\sin 2\alpha = \sin 60° = \cos 30° = \cos \alpha$

и $\cos 2\alpha = \cos 60° = \sin 30° = sin\, \alpha$

То есть:

$$L = \frac{2{V_0}^2\, 2\, sin\, \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{2{V_0}^2 \sin 2\alpha}{g}$$

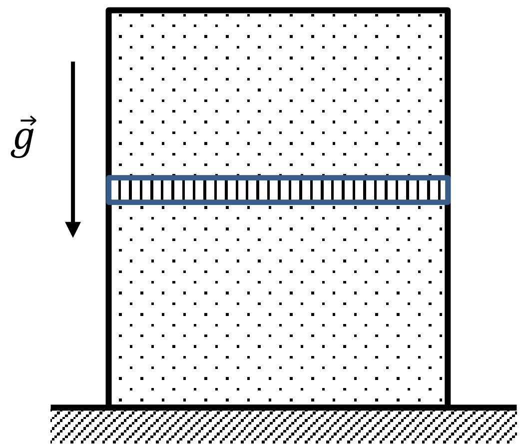
$$\boxed{L = \frac{2{V_0}^2 \sin 2\alpha}{g}}$$

$$L = 2 \cdot 1^2 \frac{\sin 60°}{10} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{10} = 0{,}173 \text{ м}$$

Задача 30 (бывшая С3) – это задача на газовые законы или термодинамику.

Например:

2. Вертикально расположенный замкнутый цилиндрический сосуд высотой 50 см разделен подвижным поршнем весом 110 Н на две части, в каждой из которых содержится одинаковое количество идеального газа при температуре 361 К. Сколько молей газа находится в каждой части цилиндра, если поршень расположен на высоте 20 см от дня сосуда? Толщиной поршня пренебречь.



Дано:

H = 50 см = 0,5 м

P = 110 Н

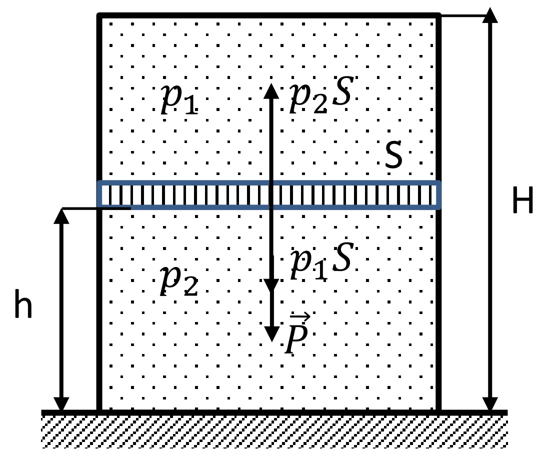
T = 361 К

h = 20 см = 0,2 м

ν - ?

Решение:

ν – число молей в каждой части цилиндра.



p_1 – давление в верхней части цилиндра;

p_2 – давление в нижней части цилиндра;

S – площадь сечения поршня.

p_1S – сила давления на поршень газа в верхней части цилиндра;

p_2S - сила давления на поршень газа нижней части цилиндра.

Так как поршень неподвижен, сумма всех действующих на него сил равна нулю.

То есть:

$$p_2S = p_1S + P$$

Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для верхней и нижней частей цилиндра:

$$p_1V_1 = \nu RT;$$

$$p_2V_2 = \nu RT,$$

Где $V_1 = (H-h)S$ – объем верхней части цилиндра;

$V_2 = hS$ - объем нижней части цилиндра.

Выражаем p_1 и p_2:

$$p_1 = \frac{\nu RT}{V_1};$$

$$p_2 = \frac{\nu RT}{V_2}$$

И подставляем в уравнение для сил:

$$p_2S = p_1S + P$$

$$\frac{\nu RT}{V_2}S = \frac{\nu RT}{V_1}S + P$$

Подставляем выражения для объемов:

$$\frac{\nu RT}{hS}S = \frac{\nu RT}{(H-h)S}S + P$$

Сокращаем S:

$$\frac{\nu RT}{h} = \frac{\nu RT}{H-h} + P$$

$$\frac{\nu RT}{h} - \frac{\nu RT}{H-h} = P$$

$$\nu RT(\frac{1}{h} - \frac{1}{H-h}) = P$$

$$\nu RT\left(\frac{H-h-h}{h(H-h)}\right)=P$$

Откуда:

$$\boxed{\nu=\frac{P\,h(H-h)}{RT(H-2h)}}$$

$$\nu=\frac{110\cdot 0{,}5\cdot(0{,}5-0{,}2)}{8{,}31\cdot 361\cdot(0{,}5-2\cdot 0{,}2)}=0{,}022\ \text{моль}$$

Итак, мы, разобрали две задачи. На моем интенсиве по задачам 29 и 30 я разбираю более 40 задач. Буду рада видеть вас на моих занятиях.